TÉCNICO LISBOA

Propagação & Antenas

Docente Responsável: **Prof. Carlos R. Paiva**

Duração: 1 hora 30 minutos **20 de Janeiro de 2018**

Ano Lectivo: 2017 / 2018 **SEGUNDO TESTE**

1. Uma placa dieléctrica de diamante, com um índice de refracção $n_1 = 2.4$ e uma espessura $d = 0.5\ \text{mm}$, encontra-se assente sobre um plano condutor eléctrico perfeito em $x = 0$. O meio superior, para $x > d$, é o ar (com um índice de refracção $n_2 = 1$). Considere que esta estrutura funciona como guia de ondas com propagação longitudinal da forma $\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right]$.

a) Determine a banda de frequências em que este guia de ondas opera em regime monomodal. Justifique a sua resposta com um diagrama de dispersão $b-\text{versus}-v$ no intervalo $0 \le v \le 5$.

b) Para $f = 60\ \text{GHz}$, calcule o índice de refracção modal $\overline{n}$ correspondente ao modo fundamental. Qual é, neste caso, a velocidade de fase? Acompanhe a sua solução com uma representação gráfica apropriada.

c) Represente, de forma qualitativa, o perfil de $\left|E_z\right|$ em função da altura. Adopte x como eixo vertical e a amplitude do campo como eixo horizontal. Referencie, no seu gráfico, a localização da interface $x = d$. Considere os resultados da alínea anterior.

d) A solução numérica para os modos TE deste guia resulta do sistema

$$\begin{cases} w = -u\cot(u) \\ u^2 + w^2 = v^2 \end{cases}$$

que é, do ponto de vista computacional, equivalente a pesquisar os zeros da função

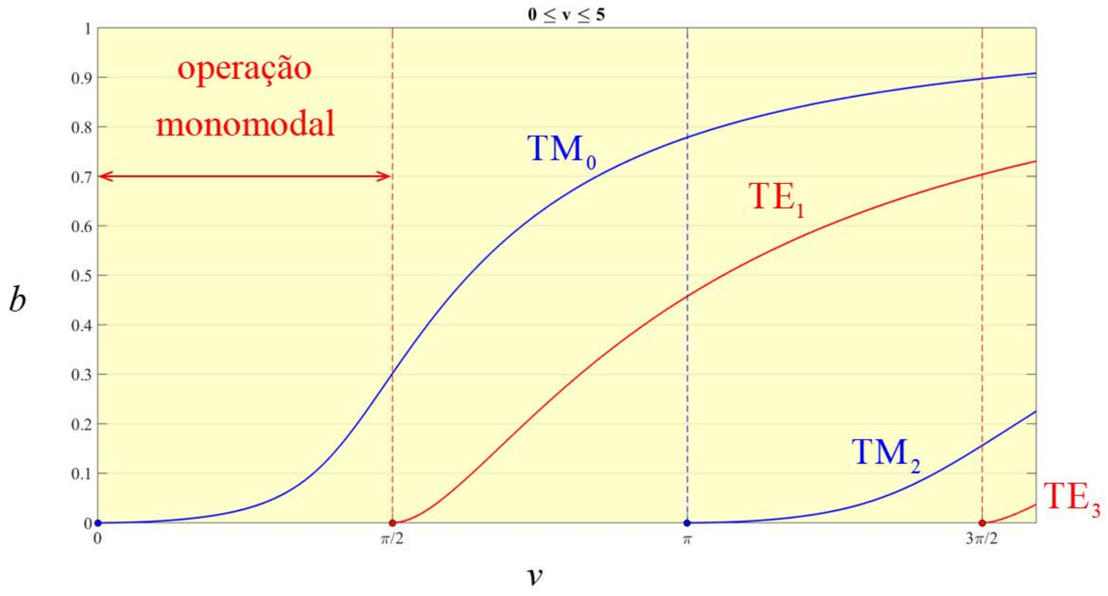
$$f(u) = u^2 - v^2 \sin^2(u).$$

Este processo é, graficamente, equivalente a encontrar as intersecções de duas curvas: as curvas correspondentes a $\phi(u) = u^2$ e a $\psi(u) = v^2 \sin^2(u)$. Considere, então, três casos possíveis: (i) $v = 1.25$; (ii) $v = 3$; (iii) $v = 6$. Determine, para cada um destes três casos, as soluções numéricas. Explique, para cada caso, quais dessas soluções são realmente soluções fisicamente aceitáveis e explique porquê.

Solução

a) O modo fundamental é o TM_0. O segundo modo é o TE_1 cuja frequência normalizada de corte é $v_c = \pi/2$. Assim,

$$\frac{2\pi f_c}{c}\, d\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \frac{\pi}{2} \quad \mapsto \quad f_c = \frac{c}{4d\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \quad \mapsto \quad \boxed{f_c = 68.7524\ \text{GHz}}.$$



b) Para o modo fundamental, TM_0, tem-se

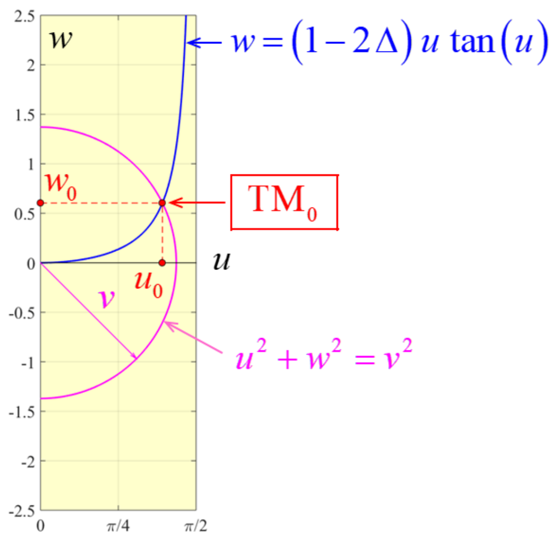
$$\boxed{v = n_1 k_0 d \sqrt{2\Delta}} \rightarrow \begin{cases} w = (1-2\Delta)\, u \tan(u) \\ u^2 + w^2 = v^2 \end{cases}$$

$$\boxed{v = 1.3708}$$

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1^2} = 0.4132$$

$$1 - 2\Delta = \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_0 &= 1.2307 \\ w_0 &= 0.6038 \end{aligned}}$$



Para a obtenção de uma solução numérica é preferível usar a equação equivalente:

$$f(u) = \left(u^2 - v^2\right)\cos^2(u) + (1-2\Delta)^2\, u^2 \sin^2(u) = 0\,.$$

No intervalo $0 < u < \pi/2$ a solução é dada por $u_0 = 1.2307$. Daqui resulta que

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{v^2}{2\Delta} - u^2} \quad \mapsto \quad \lambda_g = \frac{2\pi d}{\sqrt{\frac{v^2}{2\Delta} - u^2}} = 3.6052 \text{ mm} .$$

Assim, infere-se que

$$\lambda = \frac{c}{f} = 5 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{n} = \frac{\beta}{k_0} = \frac{\lambda}{\lambda_g} = 1.3869} .$$

A velocidade de fase v_p é, então, dada por

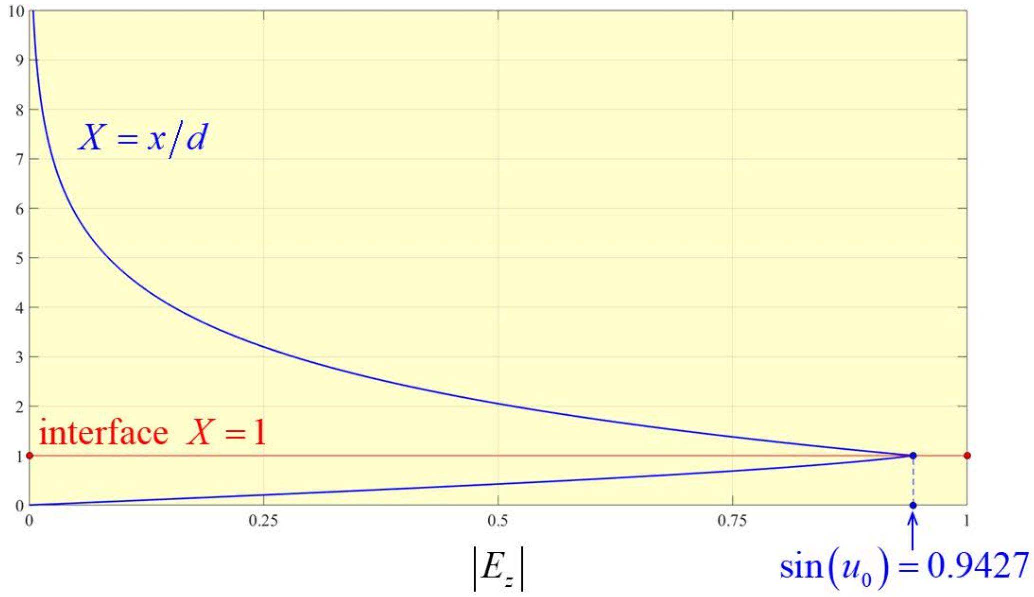
$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c\,k_0}{\overline{n}\,k_0} \quad \mapsto \quad \boxed{v_p = \frac{c}{\overline{n}} = 2.1631 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} .$$

c) Tem-se

$$E_z(x,z,t) = \begin{cases} \mathsf{A} \sin(hx) \exp[i(\beta z - \omega t)], & 0 \le x \le d \\ \mathsf{A} \sin(hd) \exp[-\alpha(x-d)] \exp[i(\beta z - \omega t)], & x \ge d \end{cases}$$

Em termos normalizados podemos escrever

$$\left| E_z(x,z,t) \right| = \begin{cases} \sin\left(u_0 \dfrac{x}{d}\right), & 0 \le x \le d \\ \sin(u_0) \exp\left[-w_0 \left(\dfrac{x}{d} - 1\right)\right], & x \ge d \end{cases}$$

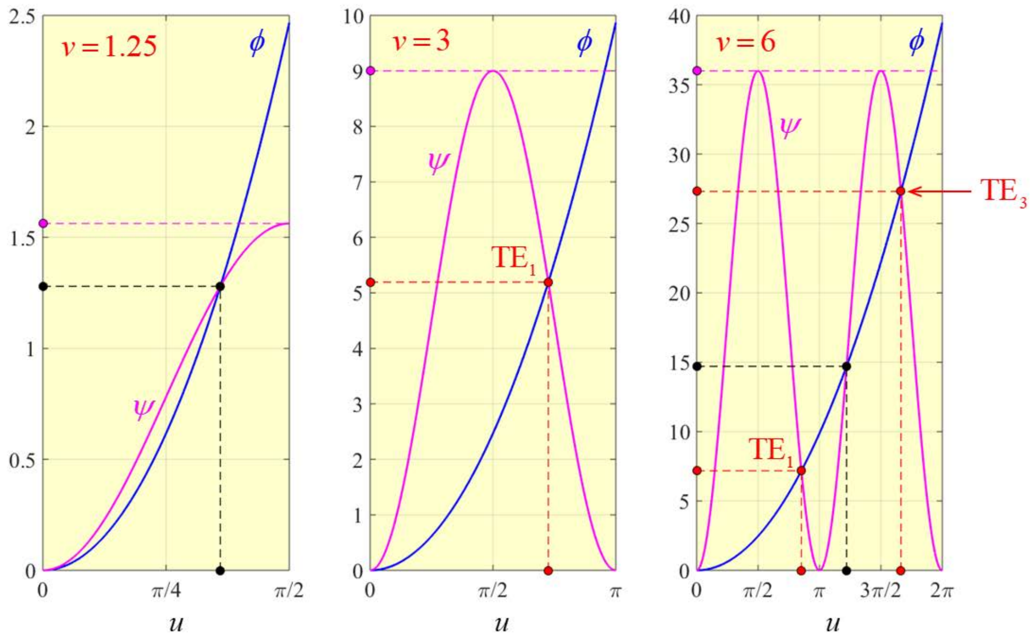


d) A solução modal para os modos TE resulta de

$$\begin{cases} w = -u\cot(u) \\ u^2 + w^2 = v^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(u) = u^2 - v^2\sin^2(u) = 0}.$$

Porém, só têm significado físico as soluções numéricas para as quais a intersecção de $\phi(u) = u^2$ com $\psi(u) = v^2\sin^2(u)$ correspondam a valores $w > 0$, i.e., tais que $\alpha > 0$ (ondas superficiais, portanto). Daqui decorre que, no intervalo $0 < u < 2\pi$, só têm significado físico as soluções para as quais:

$$\left[\begin{array}{lll} \text{modo } \mathrm{TE}_1 & \mapsto & \dfrac{\pi}{2} < u < \pi \\ \text{modo } \mathrm{TE}_3 & \mapsto & \dfrac{3\pi}{2} < u < 2\pi \end{array}\right.$$



Nas três situações aqui consideradas verifica-se, deste modo, que:

- No primeiro caso, em que $v = 1.25$, a solução numérica obtida $[\, u = 1.1311 \mapsto w = -0.5321 \,]$ não é uma solução válida.
- No segundo caso, em que $v = 3$, a solução numérica obtida $[\, u = 2.2789 \mapsto w = 1.9511 \,]$ é uma solução válida e corresponde ao modo TE_1.
- No terceiro caso, em que $v = 6$, nem todas as três soluções numéricas obtidas correspondem a soluções aceitáveis: a primeira solução $[\, u = 2.6788 \mapsto w = 5.3688 \,]$ é uma solução válida e corresponde ao modo TE_1; a segunda solução $[\, u = 3.8350 \mapsto w = -4.6144 \,]$ não é uma solução válida; a terceira solução $[\, u = 5.2260 \mapsto w = 2.9478 \,]$ é uma solução válida e corresponde ao modo TE_3.

2. Pretende-se obter um agregado uniforme de $N=5$ antenas em que o máximo de radiação ocorra, no plano equatorial, para um azimute $\phi_{\max}=45^\circ$. Considere que se tem $d=2\lambda/5$. Admita que as antenas elementares são isotrópicas.

a) Determine a desfasagem progressiva α das correntes de alimentação bem como os limites $\{u_1, u_2\}$ do domínio visível $u_1 \le u \le u_2$ do diagrama de radiação do agregado.

b) Represente graficamente, no intervalo $-2\pi \le u \le 2\pi$, o andamento do factor $|F(u)|$ do agregado, com $u=k_0 d\cos(\psi)-\alpha$. Qual é o valor $F_{\max}=\max\{|F(u)|\}$? Quantos nulos e quantos lobos secundários tem o diagrama de radiação? Determine, em termos do azimute $\phi\in[\,0, 2\pi\,[$, a localização não só dos nulos mas também dos máximos locais F_m dos lobos secundários. Determine, ainda, os três níveis de lobos secundários, i.e., $\mathsf{SLL}_m = 20\log_{10}(F_m/F_{\max})$ com $m=1,2,3$. Qual é a relação frente-trás (*front-to-rear*) $\mathsf{FTR}=20\log_{10}(F_{\text{front}}/F_{\text{rear}})$ deste agregado?

c) Apresente o diagrama de radiação deste agregado (coordenadas polares) no plano equatorial.

Solução

a) O factor deste agregado uniforme é, neste caso (em que $N=5$), dado por

$$|F(u)|=\left|\frac{\sin\left(5\,\dfrac{u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)}\right|.$$

O respectivo máximo ocorre para $u=0$. Assim, obtém-se

$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{2}} \quad \rightarrow \quad u=k_0 d\cos(\psi)-\alpha=2\pi\frac{d}{\lambda}\cos(\phi_{\max})-\alpha=0$$

$$\therefore\quad \alpha=2\pi\frac{d}{\lambda}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha=\frac{4\pi}{5\sqrt{2}}=1.7772\ \text{rad}}\,.$$

Os limites do domínio visível do diagrama de radiação são

$$\left[\begin{array}{ll} \cos(\phi)=-1 & \mapsto \quad \boxed{u_1=-k_0 d-\alpha=-4.2904\ \text{rad}} \\ \cos(\phi)=+1 & \mapsto \quad \boxed{u_2=k_0 d-\alpha=0.7361\ \text{rad}} \end{array}\right.$$

b) Tem-se

$$|F(u)|=\left|\frac{\sin\left(5\,\dfrac{u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{\max}=\max\{|F(u)|\}=5}\,.$$

Os nulos do diagrama de radiação, dentro do domínio visível, são:

$$\begin{cases} \text{primeiro nulo} \;\mapsto\; u = -\dfrac{6\pi}{5} = -3.7699 \text{ rad} \;\mapsto\; \phi = \pm 78.0471^\circ \\ \text{segundo nulo} \;\mapsto\; u = -\dfrac{4\pi}{5} = -2.5133 \text{ rad} \;\mapsto\; \phi = \pm 107.0312^\circ \\ \text{terceiro nulo} \;\mapsto\; u = -\dfrac{2\pi}{5} = -1.2566 \text{ rad} \;\mapsto\; \phi = \pm 142.4567^\circ \end{cases}$$

Em termos de lobos secundários, vem

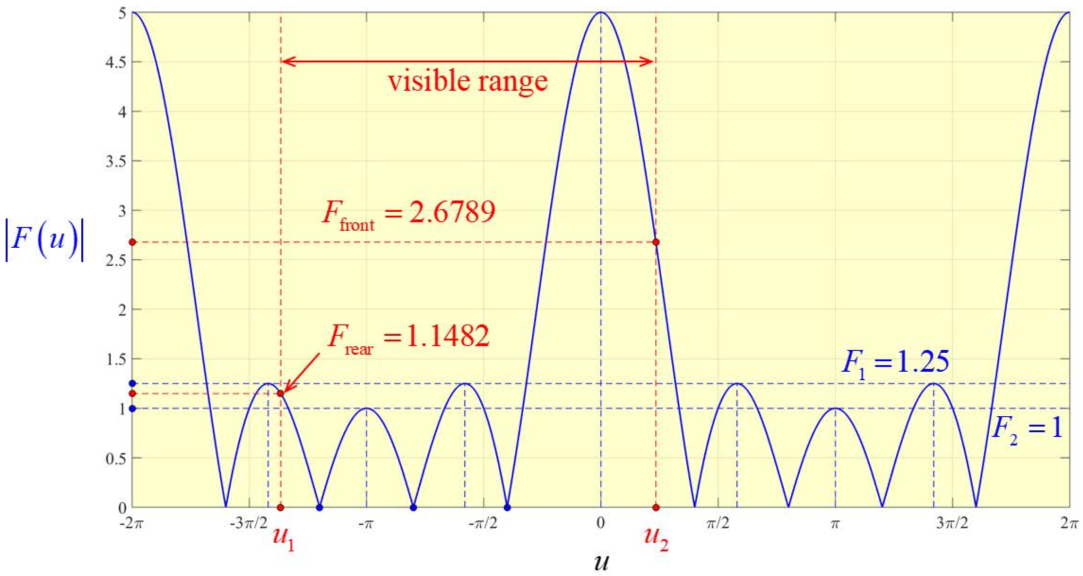
$$\begin{cases} F_1 = 1.25 \;\mapsto\; \mathsf{SLL}_1 = -12.0412 \text{ dB} \;\mapsto\; u = -1.8235 \text{ rad} \;\mapsto\; \phi = \pm 91.0561^\circ \\ F_2 = 1 \;\mapsto\; \mathsf{SLL}_2 = -13.9794 \text{ dB} \;\mapsto\; u = -\pi \;\mapsto\; \phi = \pm 122.8808^\circ \end{cases}$$

Estes valores resultam das soluções numéricas de

$$5\cos\left(5\frac{u}{2}\right)\sin\left(\frac{u}{2}\right) - \sin\left(5\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right) = 0\,.$$

Porém, o limite inferior do domínio visível também leva à formação de um lobo secundário:

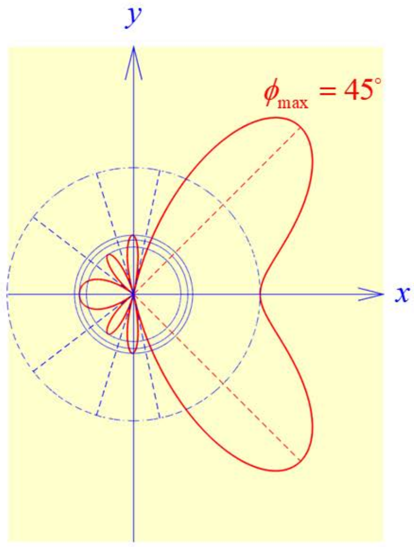
$$\left[\; F_3 = F_{\text{rear}} = 1.1482 \;\mapsto\; \mathsf{SLL}_3 = -12.7792 \text{ dB} \;\mapsto\; u = u_1 = -4.2904 \text{ rad} \;\mapsto\; \phi = 180^\circ\,. \right.$$



Note-se que, deste modo, o diagrama de radiação tem **cinco** lobos secundários. Porém, a relação frente-trás deste agregado é:

$$\boxed{\mathsf{FTR} = 7.3591 \text{ dB}}\,.$$

c) O correspondente diagrama de radiação, em coordenadas polares, apresenta-se a seguir.



3. Pretende-se sintetizar um agregado linear de $N = 4$ antenas com um desfasamento progressivo α das correntes de alimentação e um espaçamento uniforme d entre elementos. Tem-se (coordenadas esféricas) $u = k_0 d \cos(\psi) - \alpha$. No plano equatorial, em que $\theta = \pi/2$, é $\psi = \phi \in [\,0, 2\pi\,[$.

a) Para uma excitação simétrica da forma $1 : \mathsf{A} : \mathsf{A} : 1$, mostre que é possível escrever o diagrama de potência $P(\xi)$ em termos de uma única constante c_0. Como $P(\xi) = F(u)\,F^*(u)$, com $u = 2\cos(\xi)$, explicite a relação entre $\mathsf{A} \geq 0$ e c_0. Determine a zona permitida para os valores de c_0 quando se pretende que todos os zeros de $P(\xi)$ ocorram no intervalo $-2 \leq \xi \leq 2$. Note que o factor do agregado pode ser escrito na forma $F(u) = \left(1 + e^{-iu}\right)\left(1 + c_0\, e^{-iu} + e^{-2iu}\right)$.

b) Determine c_0 e $P(\xi)$ no caso concreto de um agregado uniforme em que $\mathsf{A} = 1$. Para $\alpha = 0$ e $d = \lambda/2$ represente graficamente, no plano equatorial e em coordenadas polares, o diagrama de radiação. Qual é, neste caso, o valor do $\mathsf{SLL} = -20\log_{10}(R)$?

c) Repita a alínea anterior, também com $\alpha = 0$ e $d = \lambda/2$, mas agora para um agregado em que se pretende obter $\mathsf{SLL} = -\infty$ dB (i.e., inexistência de lobos secundários).

d) Determine c_0, A e $P(\xi)$ de forma a que ocorra pelo menos um valor $\mathsf{SLL} = -20\log_{10}(R)$, com $R = 3$. Considere $d = 3\lambda/5$ e admita que um dos máximos do diagrama de radiação deve ocorrer para $\phi_{\max} = \pi/3$. Especifique, nestas condições, α e qual é o domínio visível $u_1 \leq u \leq u_2$. Represente graficamente a função $P(\xi)$ no intervalo $-2 \leq \xi \leq 2$ bem como $F(u)$

no intervalo $-3\pi \le u \le \pi$. Assinale, sempre, os valores numéricos relevantes nestes gráficos (nulos, máximos, máximos locais). Determine, em termos do azimute ϕ, a localização não só dos nulos mas também dos máximos locais F_m dos lobos secundários. Determine os três níveis de lobos secundários: $\mathsf{SLL}_m = 20\log_{10}\left(F_m / F_{\max}\right)$ com $m = 1, 2, 3$. Qual é a relação frente-trás $\mathsf{FTR} = 20\log_{10}\left(F_{\text{front}}/F_{\text{rear}}\right)$ deste agregado? A partir do gráfico de $\left|F(u)\right|$, desenhe o diagrama de radiação $\left|F(\phi)\right| = \sqrt{P(\phi)}$ no plano equatorial (coordenadas polares).

Solução

a) O factor do agregado é

$$F(u) = 1 + \mathsf{A}\, e^{-iu} + \mathsf{A}\, e^{-2iu} + e^{-3iu}$$

e, por outro lado, também

$$F(u) = \left(1 + e^{-iu}\right)\left(1 + c_0\, e^{-iu} + e^{-2iu}\right).$$

Note-se que, de facto, vem sucessivamente

$$\left|\begin{aligned} F(u) &= \left(1 + e^{-iu}\right)\left(1 + c_0\, e^{-iu} + e^{-2iu}\right) \\ &= 1 + c_0\, e^{-iu} + e^{-2iu} + e^{-iu} + c_0\, e^{-2iu} + e^{-3iu} \\ &= 1 + \left(1 + c_0\right) e^{-iu} + \left(1 + c_0\right) e^{-2iu} + e^{-3iu} \end{aligned}\right.$$

donde se tira que

$$\boxed{\mathsf{A} = 1 + c_0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{c_0 = \mathsf{A} - 1}.$$

Logo,

$$\boxed{\mathsf{A} \ge 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{c_0 \ge -1}.$$

Assim, infere-se que

$$\left|\begin{aligned} P(u) &= F(u)\, F^*(u) \\ &= \left(1 + e^{-iu}\right)\left(1 + e^{iu}\right)\left(1 + c_0\, e^{-iu} + e^{-2iu}\right)\left(1 + c_0\, e^{iu} + e^{2iu}\right) \end{aligned}\right.$$

Mas, por outro lado, tem-se

$$\left(1 + e^{-iu}\right)\left(1 + e^{iu}\right) = 1 + e^{iu} + e^{-iu} + 1 = 2 + 2\cos(u)$$

uma vez que

$$e^{ix} + e^{ix} = 2\cos(x).$$

Portanto, definindo

$$\boxed{\xi = 2\cos(u)} \quad \mapsto \quad \boxed{-2 \le \xi \le 2},$$

resulta que

$$\left(1 + e^{-iu}\right)\left(1 + e^{iu}\right) = \xi + 2.$$

Analogamente, vem

$$\left|\begin{aligned}\left(1+c_0\,e^{-iu}+e^{-2iu}\right)\left(1+c_0\,e^{iu}+e^{2iu}\right) &= 1+c_0\,e^{iu}+e^{2iu}\\ &\quad +c_0\,e^{-iu}+c_0^2+c_0\,e^{iu}\\ &\quad +e^{-2iu}+c_0\,e^{-iu}+1\\ &= \left(2+c_0^2\right)+4\,\xi\cos(u)+2\cos(2u)\end{aligned}\right.$$

ou ainda, como

$$\cos(2u)=\cos^2(u)-\sin^2(u)=2\cos^2(u)-1,$$

$$\left|\begin{aligned}\left(1+c_0\,e^{-iu}+e^{-2iu}\right)\left(1+c_0\,e^{iu}+e^{2iu}\right) &= \left(2+c_0^2\right)+2\,c_0\,\xi+\left(\xi^2-2\right)\\ &= \xi^2+2\,c_0\,\xi+c_0^2\\ &= \left(\xi+c_0\right)^2\end{aligned}\right.$$

obtém-se, finalmente,

$$\boxed{P(\xi)=(\xi+2)\,(\xi+c_0)^2}\,.$$

Isto mostra a existência de dois zeros de $P(\xi)$, a saber:

$$\boxed{\text{zeros de } P(\xi)} \rightarrow \left[\begin{array}{l}\xi=-2\\ \xi=-c_0\end{array}\right.$$

Se se pretender que todos os nulos de $P(\xi)$ ocorram no intervalo $-2\le\xi\le 2$, é necessário impor a condição adicional

$$|c_0|\le 2\,.$$

Ou seja, deve ter-se

$$\boxed{-1\le c_0\le 2}\,.$$

b) Para um agregado uniforme tem-se $\mathsf{A}=1$. Neste caso, obtém-se $c_0=0$, vindo então

$$\boxed{P(\xi)=\xi^2\,(\xi+2)}\,.$$

Os nulos do diagrama de radiação correspondem a

$$\textbf{nulos} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\xi=-2\\ \xi=0\end{array}\right.$$

e o máximo a

$$\textbf{máximo} \quad \rightarrow \quad \boxed{\xi_{\max}=2} \quad \mapsto \quad \boxed{P_{\max}=16}\,.$$

Os lobos secundários deverão ocorrer para

$$\frac{dP}{d\xi}=0 \quad \Rightarrow \quad 3\,\xi^2+4\,\xi=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi_m=-\frac{4}{3}} \quad \mapsto \quad \boxed{P_m=\frac{2^5}{3^3}=1.1852}$$

o que permite calcular

$$\boxed{\mathsf{SLL}=10\log_{10}\left(\frac{2}{27}\right)=-11.3033\ \text{dB}}\,.$$

Note-se que

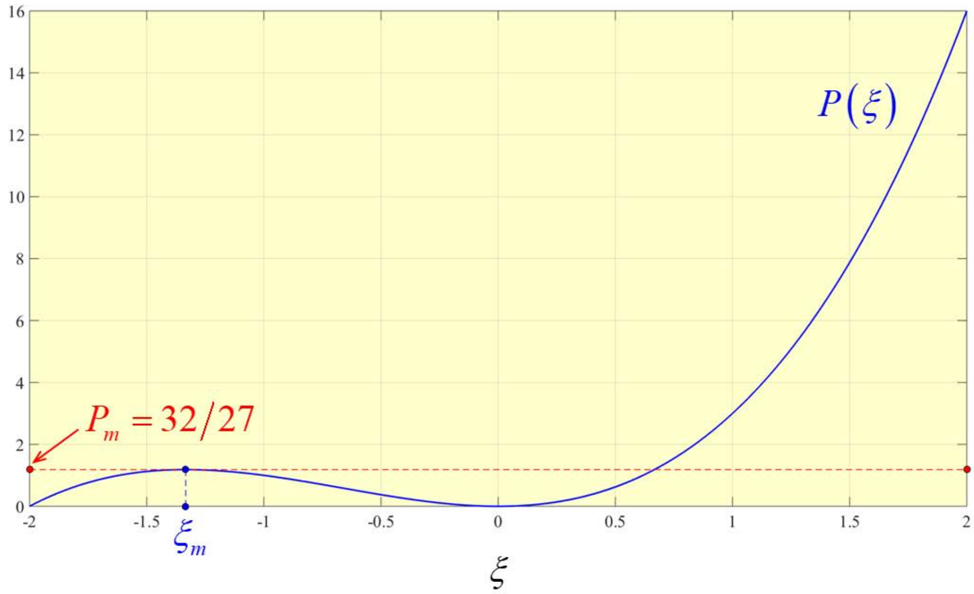
$$u_m = \cos^{-1}\left(\frac{\xi_m}{2}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = 2.3005 \text{ rad}.$$

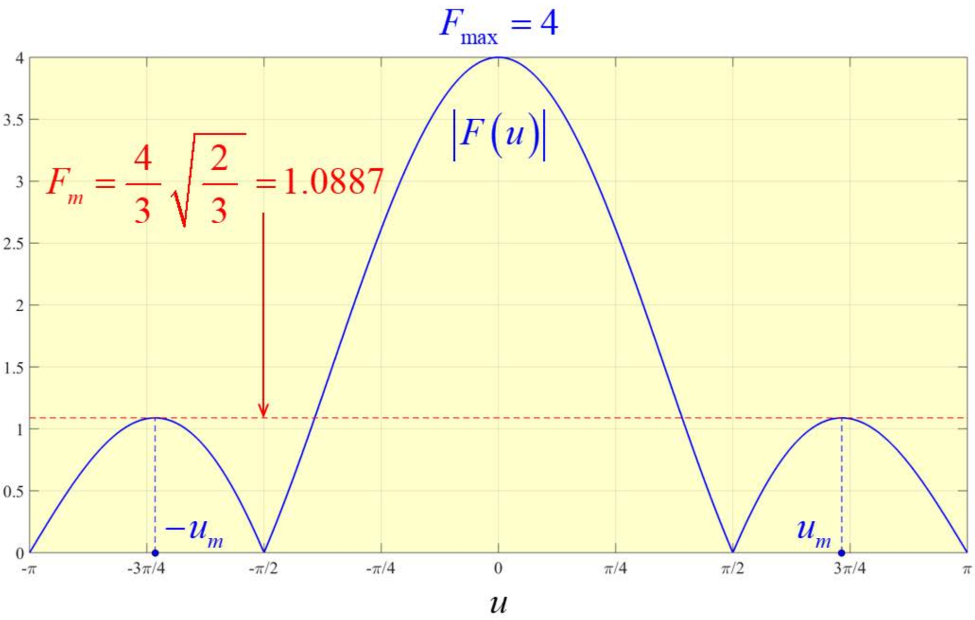
Em termos da variável u este polinómio escreve-se

$$\left|\begin{aligned} P(u) &= 8\cos^3(u) + 8\cos^2(u) \\ &= 8\cos^2(u)\left[\cos^2(u)+1\right] \quad \Rightarrow \quad |F(u)| = \sqrt{P(u)} = 4\left|\cos(u)\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right| \\ &= 16\cos^2(u)\cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \end{aligned}\right.$$

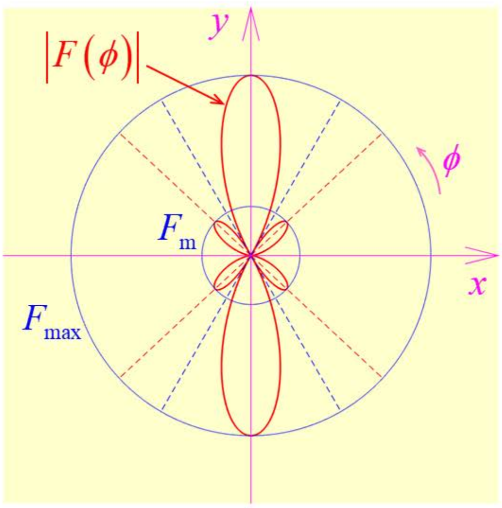
$$\therefore \quad \boxed{|F(u)| = \left|\frac{\sin(2u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\right|}.$$

$$\left[\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ d &= \lambda/2 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = 2\pi\frac{d}{\lambda}\cos(\phi) - \alpha = \pi\cos(\phi)}$$





$F_{\max} = 4$
$|F(u)|$
$F_m = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = 1.0887$
$-u_m$
u_m
u



y
$|F(\phi)|$
ϕ
F_m
x
$F_{\max}$

c) Nesta alínea pretende-se obter um diagrama sem lobos secundários que – como é conhecido – conduz a um agregado binomial.

$$P(\xi)=(\xi+2)(\xi+c_0)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{d\xi}=(\xi+c_0)(3\xi+4+c_0)$$

$$\therefore \quad \frac{dP}{d\xi}=0 \quad \Rightarrow \quad \xi_m=-\frac{4+c_0}{3} \quad \Rightarrow \quad P_m=\frac{4}{27}(2-c_0)^3$$

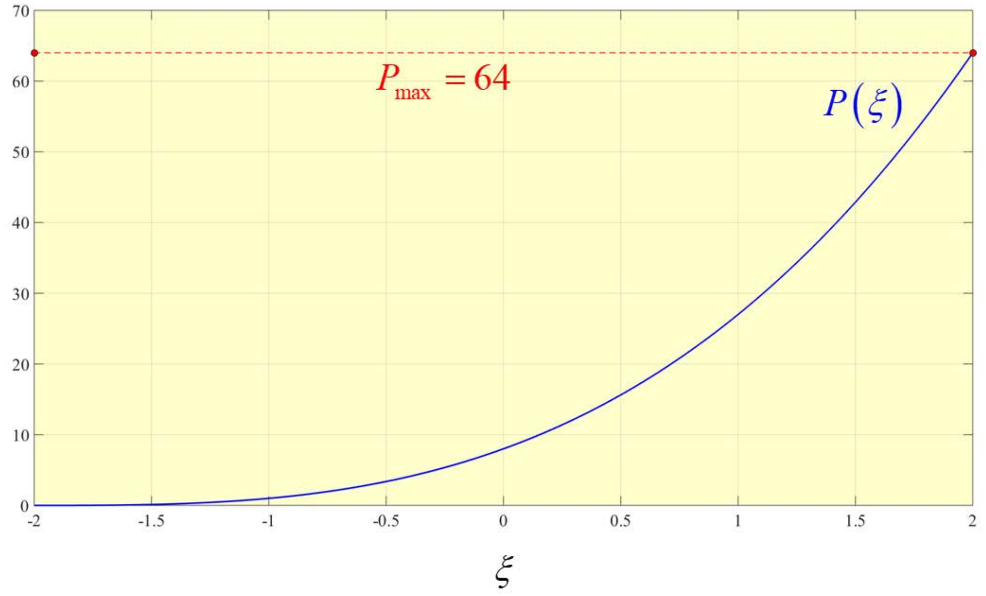
O desaparecimento dos lobos secundários implica ter-se

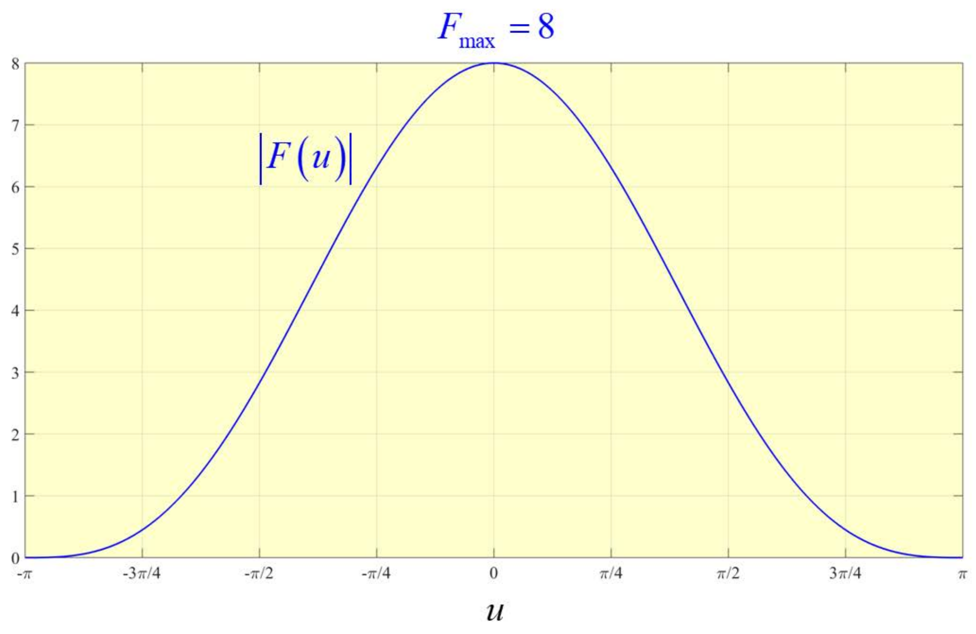
$$\boxed{P_m=0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_0=2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathsf{A}=1+c_0=3}\,.$$

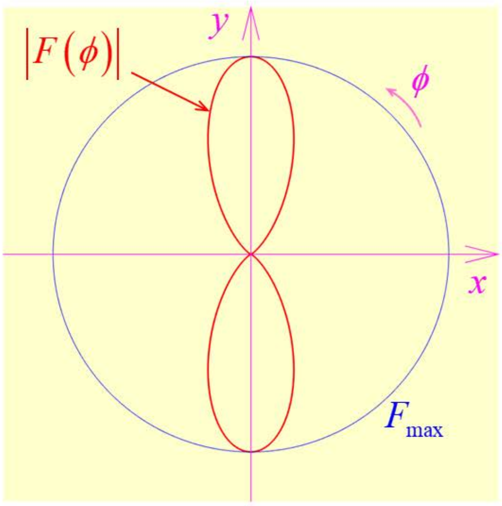
Triângulo de Pascal

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ \boxed{1 \quad 3 \quad 3 \quad 1} \end{array}$$

$$\boxed{P(\xi)=(\xi+2)^3=\xi^3+6\xi^2+12\xi+8}$$




$F_{max} = 8$
$|F(u)|$
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-π
-3π/4
-π/2
-π/4
0
π/4
π/2
3π/4
π
u


$|F(\phi)|$
y
ϕ
x
F_{max}

d) No caso geral tem-se

$$\boxed{\textbf{caso geral}} \;\rightarrow\; \boxed{P(\xi)=(\xi+2)(\xi+c_0)^2}$$

a correspondem duas espécies de nulos

$$\textbf{nulos} \;\rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \xi=-2 \\ \xi=\xi_0=-c_0 \end{array}\right.$$

e um máximo de radiação

$$\boxed{\textbf{lobo principal}} \;\rightarrow\; \textbf{máximo} \;\rightarrow\; \boxed{\xi=2} \;\rightarrow\; \boxed{P_{\max}=4(2+c_0)^2}\,.$$

Os lobos secundários deverão corresponder a

$$\boxed{\textbf{lobos secundários}} \;\rightarrow\; \frac{dP}{d\xi}=(\xi+c_0)(3\xi+4+c_0)=0\,.$$

Porém, como $\xi=\xi_0=-c_0$ é um nulo do diagrama de radiação, infere-se que os lobos secundários resultam de

$$3\xi+4+c_0=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\xi_m=-\frac{4+c_0}{3}}\,.$$

O nível correspondente é, então,

$$P_m=P(\xi_m)=\frac{4}{27}(2-c_0)^3$$

a que corresponde um valor

$$\frac{P_m}{P_{\max}}=\frac{1}{R^2}=\frac{(2-c_0)^3}{27(2+c_0)^2} \;\Rightarrow\; R^2(2-c_0)^3=27(2+c_0)^2\,.$$

Ou seja, obtém-se a seguinte equação cúbica para a variável c_0:

$$R^2c_0^3-6R^2c_0^2+27c_0^2+12R^2c_0+108c_0-8R^2+108=0\,.$$

Esta equação tem a forma genérica

$$\boxed{x\triangleq c_0} \;\mapsto\; \boxed{ax^3+bx^2+cx+d=0}$$

fazendo

$$\left[\begin{array}{l} a=R^2 \\ b=3(9-2R^2) \\ c=12(9+R^2) \\ d=4(27-2R^2) \end{array}\right.$$

a que corresponde o discriminante

$$\Delta=18abcd-4b^3d+b^2c^2-4ac^3-27a^2d^2=-5038848R^2(R^2-1)\,.$$

O discriminante é negativo para $R>1$, i.e., esta equação cúbica tem uma única raiz real mais duas raízes complexas conjugadas. Esta cúbica pode ser reduzida à forma canónica

$$\boxed{t^3+pt+q=0}$$

dividindo todos os termos por a e, de seguida, procedendo à substituição

$$\boxed{x = t - \frac{b}{3a}}\,.$$

Nestas condições, tem-se

$$\begin{cases} p = \dfrac{3ac - b^2}{3a^2} \\[2mm] q = \dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3} \end{cases}$$

Neste caso concreto, vem

$$\boxed{\begin{aligned} p &= \frac{216R^2 - 243}{R^4} \\ q &= \frac{432R^4 - 1944R^2 + 1458}{R^6} \end{aligned}}\,.$$

Para $R^2 > 243/216 = 1.125$ é $p > 0$ e a única solução real da cúbica reduzida é dada por

$$\boxed{t = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\,\sinh\left[\frac{1}{3}\sinh^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right)\right]}\,.$$

No caso concreto do enunciado deste problema vem

$$\boxed{R=3} \;\mapsto\; \boxed{\begin{aligned} a &= 9 \\ b &= -27 \\ c &= 216 \\ d &= 36 \end{aligned}} \mapsto \boxed{\begin{aligned} p &= 21 \\ q &= 26 \end{aligned}} \mapsto \boxed{t = -1.1632} \mapsto \boxed{c_0 = x = t - \frac{b}{3a} = -0.1632}$$

que poderia ser obtido, mais rapidamente, através da solução numérica directa da cúbica

$$\boxed{9c_0^3 - 27c_0^2 + 216c_0 + 36 = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_0 = -0.1632}\,.$$

Este valor de $R = 3$ corresponde a um nível de lobos secundários de

$$\boxed{R=3} \quad \mapsto \quad \boxed{\mathsf{SLL} = -20\log_{10}(R) = -9.5424 \text{ dB}}\,.$$

Com base neste valor de c_0 é, agora, possível calcular

$$\boxed{\mathsf{A} = 1 + c_0 = 0.8368}\,.$$

Conclui-se, portanto, que o esquema de excitação dos quatro elementos deste agregado é o que se segue:

$$\boxed{1 \quad \mathsf{A} \quad \mathsf{A} \quad 1} \quad \mapsto \quad \boxed{1 \quad 0.8368 \quad 0.8368 \quad 1}\,.$$

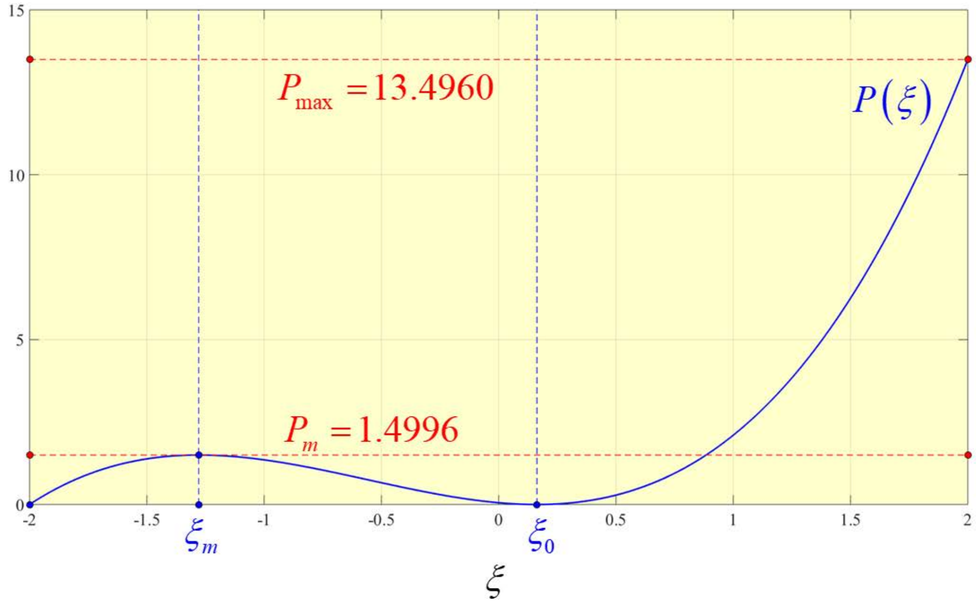
Para que um dos máximos do diagrama de radiação ocorra para $\phi_{\max} = 60^\circ$, é necessário verificar-se

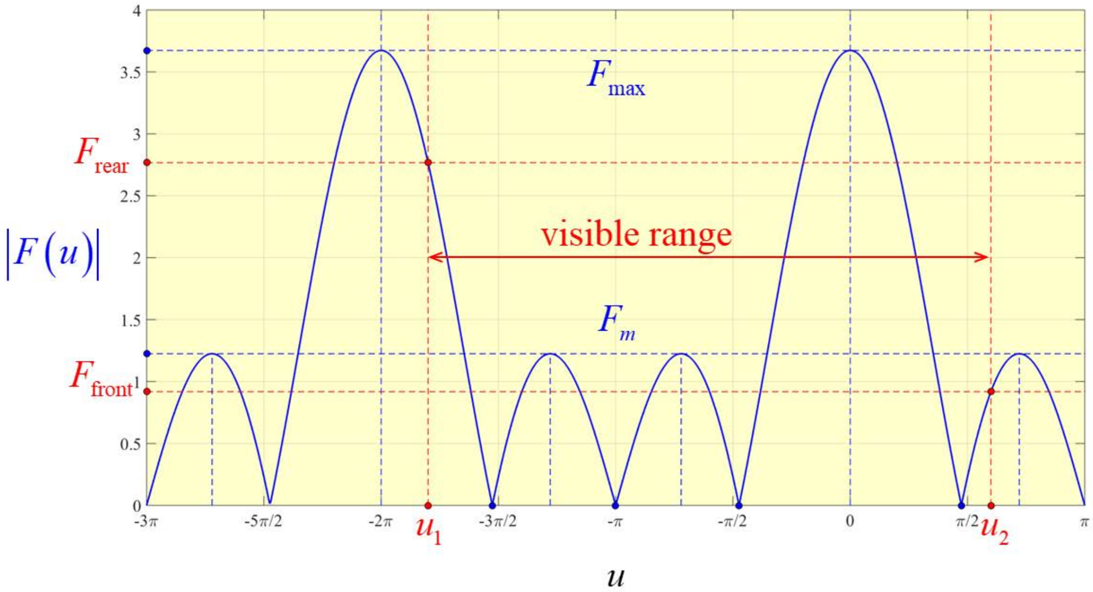
$$\boxed{\frac{d}{\lambda} = 0.6} \quad \mapsto \quad \boxed{\alpha = 2\pi\frac{d}{\lambda}\cos(\phi_{\max}) = \frac{3\pi}{5} = 1.8850 \text{ rad}}\,.$$

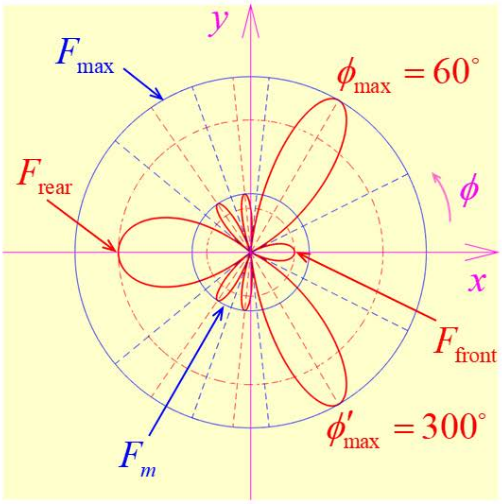
Infere-se daqui, portanto, que

$$\boxed{u=\frac{3\pi}{5}\left[2\cos(\phi)-1\right]} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\phi=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{5u}{6\pi}\right)}.$$

$$\boxed{\textbf{domínio visível}} \rightarrow \begin{cases} \cos(\phi)=-1 & \mapsto \quad \boxed{u_1=-k_0 d-\alpha=-\dfrac{9\pi}{5}=-5.6549\text{ rad}} \\ \cos(\phi)=+1 & \mapsto \quad \boxed{u_2=k_0 d-\alpha=\dfrac{3\pi}{5}=1.8850\text{ rad}} \end{cases}$$







Valores numéricos:

$$\boxed{\begin{array}{ll} c_0 = -0.1632 & P_{\max} = P(2) = 13.4960 \\ \mathsf{A} = 0.8368 & P_m = P(\xi_m) = 1.4996 \\ \xi_m = -1.2789 & r = P_{\max}/P_m = R^2 = 9 \end{array}} \, .$$

Outros valores:

$$\boxed{\begin{array}{l} F_{\max} = \sqrt{P_{\max}} = 3.6737 \\ F_m = \sqrt{P_m} = 1.2246 \\ R = F_{\max}/F_m = 3 \\ F_{\text{rear}} = F_1 = F(u_1) = 2.7673 \\ F_{\text{front}} = F_2 = F(u_2) = 0.9183 \end{array}} \mapsto \boxed{\begin{array}{l} \mathsf{SLL}_1 = 20\log_{10}\left(\dfrac{F_1}{F_{\max}}\right) = -2.4604 \text{ dB} \\ \mathsf{SLL}_2 = 20\log_{10}\left(\dfrac{F_2}{F_{\max}}\right) = -12.0418 \text{ dB} \\ \mathsf{SLL}_3 = 20\log_{10}\left(\dfrac{F_m}{F_{\max}}\right) = -9.54244 \text{ dB} \\ \mathsf{RFT} = 20\log_{10}\left(\dfrac{F_{\text{front}}}{F_{\text{rear}}}\right) = -9.5811 \text{ dB} \end{array}} \, .$$

Localização de nulos de radiação:

$$\boxed{\begin{array}{l} \phi_1 = \pm 26.4912^\circ \\ \phi_2 = \pm 83.9730^\circ \\ \phi_3 = \pm 109.4712^\circ \\ \phi_4 = \pm 140.5035^\circ \end{array}} \, .$$

Localização dos lobos secundários de nível F_m:

$$\boxed{\begin{array}{l} \phi_{m1} = \pm 95.7798^\circ \\ \phi_{m2} = \pm 124.4690^\circ \end{array}} \, .$$